数学科学習指導案

1．日時　2025年6月~~2~~6日 ~~10時40分～11時30分~~ 9時40分～10時30分

2．指導者

3．学級

4．単元名　式と証明（第2節 等式・不等式の証明）　使用教科書：NEXT 数学Ⅱ

5．単元の目標

（ア）知識・技能

・3次の乗法公式及び因数分解の解の公式を理解し，それらを用いて式の展開や因数分解ができる．

・等式や不等式の基本性質について理解することができる．

・例に倣って等式・不等式の証明を行うことができる．

（イ）思考・判断・表現

・実数の性質や等式の性質，不等式の性質などを基に，等式や不等式が成り立つことを論理的に考察し，証明できる．

・日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え，方程式を問題解決に活用できる．

（ウ）学びに向かう力，人間性等

・等式，不等式の基本性質を用いて考察し，様々な演習問題に用いることができる．

6．単元観

等式については，中学で基本的な等式の性質と一元一次方程式，連立二元一次方程式，二次方程式を扱っている．また，不等式については，数Ⅰで不等式の基本的な性質，一次不等式，二次不等式を扱っている．ここでは，等式・不等式の基本的性質や実数の性質，絶対値の性質，相加平均・相乗平均の関係などを用いて証明を行う．これらの活動を通して等式・不等式の理解を深め，等式・不等式が成り立つことを論理的に考察する力を養う．

7．生徒観

数学に苦手意識を持つ生徒が多く，中学で学んだ基本内容が備わっていない．しかし，周りと相談して学習したり，教師に質問をしたりすることが多く，積極的に学習に取り組む生徒達でもある．問題文をきちんと読み解く能力や証明の道筋を立てることが苦手である．また，証明の書き方についても正しいかどうか理解していない状態で問題を解くこともある．

8．指導観

本単元では等式・不等式の証明を行う．まず初めに等式の証明をできるようにする．そのために，恒等式の証明で良く用いられる方法について理解する．そして例に倣って証明を行い，等式の証明について理解する．一つの式について複数の証明方法を取り上

げ，証明手順の対比を行う．

9．単元の評価規準

●知識・技能	▲思考・判断・表現	■主体的に取り組む態度
・恒等式や不等式の証明方法について理解している． ・実数の大小関係の基本性質について理解している．	・恒等式や不等式の性質に着目し，等式や不等式が成り立つことを論理的に考察する力を身につけている．	・数学の良さを認識し数学を活用したり，数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている． ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとしている．

10．　単元の指導計画

時間	おもな学習内容，学習活動	評価規準
1	・恒等式の証明方法について理解し，恒等式の証明を行う．	●恒等式の証明方法について理解している． ▲恒等式の性質に着目し等式の証明をすることができる．
2 本時 ココ	・与えられた文字に条件があるときの等式の証明を行う．	▲与えられた条件に着目し，その条件下での等式の証明をすることができる． ■問題解決の過程を振り返って考察を深め，自主的に問題演習に取り組もうとしている．
3	・実数の大小関係の基本性質について理解し，不等式の証明を行う．	●実数の大小関係の基本性質について理解している． ▲実数の基本性質に着目し不等式の証明をすることができる．
4	・実数の平方の性質を利用して不等式の証明を行う． ・根号を含む不等式の証明を行う．	●実数の平方の性質について理解している． ▲実数の平方の性質を利用して不等式の証明や根号を含む不等式の証明をすることができる．
5	・絶対値を含む不等式の証明を行う． ・相加平均・相乗平均について知り，その大小関係を用いて証明を行う．	●相加平均・相乗平均について理解している． ▲絶対値を含む不等式の証明や相加平均・相乗平均の大小関係を利用して不等式の証明をすることができる．

11．　本時の指導計画

(1)　本時の目標

・与えられた文字に条件があるとき，等式の証明ができる．

(2)　本時の展開

	学習内容・学習活動	指導と配慮事項	評価
導入 (5分)	練習27 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ． $a^2+ca=b^2+bc$	・宿題の解説を行う．	
展開1 (20分)	練習 28 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ． (1)　条件の式を用いて，文字を消去して証明せよ． (2)　$a+b+c=0$ から $a+b=-c$ である．このような変形を利用して証明せよ． ・恒等式のどの証明方法を用いているか確認する．	・練習28を板書した後，机間指導を行う．(1)に関しては例題6と同様に解けばよいことをヒントとして与える．	▲与えられた条件を用いて証明をすることができる． ■問題解決の過程を振り返って考察を深め，自主的に問題演習に取り組もうとしている．
展開2 (20分)	応用例題3 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，等式を証明せよ． $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ 練習 29 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ． (1) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}$ (2) $\frac{a^2+c}{b^2+d}=\frac{a^2}{b^2}$	・$\frac{a}{b}=k$，$\frac{c}{d}=k$ とおいてから中学で既習済みなので $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおく． ・「よって，～のとき～である」と結論を省略しないように注意する． ・机間指導を行う．手が止まっている生徒には応用例題と同様に解けることを話し，まず，与えられた条件を $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくことを促す．	▲与えられた条件を用いて証明をすることができる． ■問題解決の過程を振り返って考察を深め，自主的に問題演習に取り組もうとしている．
まとめ (5分)		・本日のポイントについて再確認を行い，余った時間は Study-up の問題演習をしてもらう．	

12. 考察

恒等式が成り立つことを証明してみよう。

例題 5

次の等式を証明せよ。

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

証明

(1) 右辺$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2$

$=a^3+b^3$

$=$左辺

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　終

(2) 左辺$=a^2b^2+a^2+b^2+1$

右辺$=(ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2$

$=a^2b^2+a^2+b^2+1$

よって　$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$　終

【?】 (1), (2)は，それぞれ前ページの **1** ～ **3** のうちどの方法で証明しているだろうか。

深める **練習 25** 例題5(1)の $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ の証明を次のように書いた。しかし，この証明は不適切である。その理由を説明せよ。

> $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ から
>
> $a^3+b^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2$
>
> よって　$a^3+b^3=a^3+b^3$
>
> したがって，$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ が成り立つ。　終

目標 **練習 26** 次の等式を証明せよ。

(1) $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

(2) $(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

B 条件つきの等式の証明

目標 与えられた文字に条件があるとき，等式の証明ができるようになろう。

(p.30 練習 29)

ここまでは，等式が常に成り立つことを証明してきたが，ここからは，ある条件のもとで等式が成り立つことを証明してみよう。

条件が等式で表される場合，条件の式を用いて文字を消去するとよい。

例題 6

$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

証明

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

左辺$-$右辺

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)$

$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2=0$ *

よって　$a^3+b^3+c^3=3abc$　終

【?】 どの文字を消去して証明しただろうか。また，別の文字を消去すると，どのように証明できるだろうか。

練習 27 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2+ca=b^2+bc$$

深める **練習 28** $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明しよう。

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$$

(1) 例題6と同じように文字を消去して証明せよ。

(2) $a+b+c=0$ から $a+b=-c$ である。このような変形を利用して証明せよ。

* 例題6は，27ページの **3** の方法で証明している。**1** または **2** の方法で証明することもできる。

条件が $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のような等式で表される場合について考えよう。

$a:b$ の比の値は $\dfrac{a}{b}$ であるから，等式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ は $a:b=c:d$ と同じである。このような比や比の値が等しいことを表す式を **比例式** という。

条件が比例式で与えられたときの等式の証明について考えよう。

応用例題 3

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

考え方 前ページ例題6と同様に，条件の式を用いて文字を消去することを考えるが，条件が比例式の場合，比例式について $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおいてから文字を消去する。

証明

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

よって　$$左辺=\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$右辺=\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$$

したがって　$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$ 終

【?】 前ページ例題6では，条件の式を用いて文字 c を消去し，3文字の等式を a，b の2文字の等式として証明した。応用例題3では，条件式を用いることで文字の数がどのようになっただろうか。

目標 練習 29 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$　　(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

7 不等式の証明

ここで学ぶこと

等式の証明に引き続き，不等式が成り立つことを証明する方法を考えよう。
等式の証明は，等式が恒等式であること，つまり等式に含まれる文字にどのような値を代入しても等式が成り立つことを証明することであった。
不等式の証明も同様に，不等式に含まれる文字にどのような値を代入しても不等式が成り立つことを証明するということである。
たとえば，実数 x について，次の不等式を考えよう。

$$x^2+1>0$$

この不等式の左辺の x に，0，5，-3，$\sqrt{2}$ など，どのような値を代入しても左辺の値は常に正になり，不等式は成り立つ。しかし，いくつかの値を代入して成り立つことを確認しても，不等式を証明したことにはならない。

実数の2乗は0以上である

等式の証明の場合は，両辺から同じ式を導くことができれば，どのような値を代入しても成り立つことがいえた。しかし，不等式 $A>B$ を証明する場合は，両辺から同じ式が導かれるわけではない。そのため，A が B よりも大きいというための「根拠」が必要であり，その「根拠」をもとに，どのような値を代入しても不等式が成り立つことを証明するのである。
不等式を証明するための「根拠」には代表的なものがいくつかある。どの「根拠」を利用して証明しているのか意識しながら学んでいこう。

A 実数の大小関係

目標 不等式の証明ができるようになろう。 (p.33 練習 32)

ここからは，不等式を証明することを考えよう。
不等式では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする。

2つの実数 a，b については，

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b$$

のうち，どれか1つの関係だけが成り立つ。

22. [713NEXT 数学II 練習26]
次の等式を証明せよ。
(1) $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
(2) $(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

23. [713NEXT 数学II 例題6]
$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。
$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

24. [713NEXT 数学II 練習27]
$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。
$$a^2+ca=b^2+bc$$

25. [713NEXT 数学Ⅱ 練習28]

$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明しよう。

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$$

(1) 条件の式を用いて，文字を消去して証明せよ。

(2) $a+b+c=0$ から $a+b=-c$ である。このような変形を利用して証明せよ。

26. [713NEXT 数学Ⅱ 応用例題3]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

27. [713NEXT 数学Ⅱ 練習29]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$　　(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$