経済学部における数学教育について ～高校数学との接続の観点から～

濱本久二雄（関西大学教育開発支援センター研究員）

キーワード　高大接続、経済学部学生、数学教育、リメディアル教育／

１．はじめに

大学の経済学部や文系の学部における大学生の数学の学力低下の指摘（岡部ら，1999）とその社会的反響から約 19 年の月日が流れた。その後も例えば、経済学部における学生の数学学力向上の取り組み（蓮井，2004）や、文系学部における数学教育の新しい取り組み（瀧澤，2013）、経済学における数学の応用・効用について（高木, 2013）等の論文が発表されてきた。ここでは、筆者の追手門学院大学における「経済数学 1」「経済数学 2」の授業実践を通して、経済学部における数学教育について、筆者が長年にわたり関わってきた高校数学教育との接続という観点から、いくつかの問題点を明らかにしたい。

２．受講生の高校数学の履修状況

「経済数学 1」の受講生 137 名に、高校数学の履修状況を調査したところ下記の表のようになった。

表 1　高校数学の履修状況

科目	人数
IA	26
IA II	48
IA IIB	49
IA IIB III	6
その他	8
合計	137

上記のような受講生の数学の履修状況に見られるように、特に私立大学の経済学部で「経済数学」を受講する学生の高校での数学の履修状況についてはかなりのばらつきがある。その点を考慮して、テキスト「経済学で出る数学」（尾山ら，2013）については、前期は参考書、後期は教科書として指定した。以下、テキストといえば（尾山ら, 2013）をさす。また例題 3.5、定義 10.1 などのような書き方をしているものは、すべてこのテキストからの引用である。

３．経済数学と高校数学

この節では、経済数学に登場するいくつかの基本的な概念を例に取り上げ、高校数学教育との関連、予想される受講生の学習上の困難点などについて明らかにしたい。

3.1 需要曲線と供給曲線のグラフと逆関数

現代の経済学では「価格は需要と供給の両方によって決まる」と考え、「需要と供給を一致させる価格と数量の組」を市場均衡と呼ぶ。需要関数 $q = D(p)$, 供給関数 $q = S(p)$ のグラフを需要曲線、供給曲線というが、通常数学で扱う関数 $y = f(x)$ のグラフをかく場合とは異なり、縦軸に p 軸、横軸に q 軸をとってグラフをかく。すなわち、需要関数 $q = D(p)$, 供給関数 $q = S(p)$ の逆関数 $p = D^{-1}(q), p = S^{-1}(q)$ のグラフをかくことになる。高校で、逆関数が取り上げられるのは「数学 III」においてである。経済学部に進学してきた大多数の学生が「数学 III」未履修という現状にかんがみ、使用したテキストにおいては、需要関数・供給関数をあつかう前の節で、その準備として逆関数の定義を与え、一次関数の逆関数を取り上げている。

$$y = f(x) = ax + b,\ (a \neq 0)$$

の逆関数は

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

であること、および関数 y = f(x) とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上にかくとき、それらのグラフが直線 y = x に関して対称であることなど、必要最小限の説明がなされている。

テキストで最初に現れる需要関数、供給関数は、

$$q = D(p) = 10000 - 2p, \ (0 \leqq p \leqq 5000)$$

$$q = S(p) = 3p, \ (p \geqq 0)$$

なので、縦軸に p 軸、横軸に q 軸をとった座標平面上に、それらのグラフをかくために

$$p = 5000 - \frac{q}{2}, \quad p = \frac{q}{3}$$

と変形している。これだけなら特に逆関数の知識がなくても対応できるが、のちに取り上げる消費者余剰の計算においては、「需要関数

$$x = D(p) = \frac{3}{p} - 1$$

の逆需要関数は

$$p = D^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}$$

である」とあっさりと書かれているが、逆関数に慣れていない学生にとっては、

$$x = \frac{3}{p} - 1 \Leftrightarrow x + 1 = \frac{3}{p} \Leftrightarrow p(x+1) = 3$$

より $p = \dfrac{3}{x+1}$ となるという「ちょっとした計算」にも、戸惑いを覚えるであろう。また、分数関数 $p = \dfrac{3}{x+1}$ のグラフが、分数関数 $p = \dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に−1 だけ平行移動したものであるという事実を知っていないと、この分数関数のグラフをかくことはできない。

3.2 複利計算と割引現在価値

複利計算については、高校の「数学 B」で学習するが，例えばA 社の教科書でも「研究」の欄で「複利計算と等比数列」と題して、複利計算の意味と積立預金の例が取り上げられているが、わずか１ページであり高校生が複利計算に習熟しているとはいいがたい。まして，（文系(?)の）経済学部に進学してきた学生にとっては、高校で「数学B」を履修していたとしても、ほぼ初めて学ぶという感覚に近いと思われる（実際、授業でもよく理解できないという感想を少なからず聞いた）。

年利率 r の複利計算で c 万円を t 年間預けると $c(1+r)^t$ 万円になる。これを利用すると経済学で出てくる**ゼロクーポン債**（決められた期日になると券面に記された額が支払われるという債券のこと）についての問題を解くことができる。

例題 3.5　t 年後に a 億円が償還されるゼロクーポン債の割引現在価値を割引因子 $\delta = \frac{1}{1+r}$ を用いて表せ.

解　題意より $c(1+r)^t = a$. したがって,

$$c = a \cdot \frac{1}{(1+r)^t} = a\delta^t$$

より，割引現在価値は $a\delta^t$ 億円となる.

例題 3.6　t 年後に a 億円が償還されるゼロクーポン債を p 円で購入したとする. この債券の割引現在価値が割引率 r のときにちょうど p 円になるならば，この債券の利回りは r であるという．利回り r を a, t, p の式で表せ.

解　例題 3.5 よりこのゼロクーポン債の割引現在価値は $\frac{a}{(1+r)^t}$ 円である．これが p 円に等しいので,

$$p = \frac{a}{(1+r)^t} \Leftrightarrow (1+r)^t = \left(\frac{a}{p}\right)$$

すなわち $r = \left(\dfrac{a}{p}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$

となる.

等比数列の和の公式を用いて積立預金の元利合計を求めるときと同様にして割引現在価値の和を求めることができる。

例題 4.7　現在(1 年目)から T 年後（T 年目）まで、ある金額の収入があることが決まっており, t 年目の収入が wt 万円(t = 1, 2, ・・・, T)であるとする．ただし，収入は各年の期首に得られるものとする．年利率が r のとき，次の問いに答えよ．

(1)　この収入の割引現在価値をΣ記号を用いて表せ．

(2)　現在から T 年後まで毎年 w 万円の一定の収入があるとする。この収入の列の割引現在価値が(1)の答えとちょうど一致するような w を計算せよ．

(3)　T→∞のとき，(2)の問いに答えよ．

解(1)　この割引現在価値の和を Pv とおくと

$$Pv = w_1 + w_2\delta + w_3\delta^2 + \cdots + w_T\,\delta^{T-1}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} w_t \delta^{t-1}$$

となる．

(2)　この場合の割引現在価値の和を P とすると，(1) において $w_t = w$ であるから

$$P = \sum_{t=1}^{T} w\,\delta^{t-1} = \frac{w(1-\delta^T)}{1-\delta}$$

で，P = Pv を満たす w は次のように与えられる．

$$\frac{w(1-\delta^T)}{1-\delta} = \sum_{t=1}^{T} w_t \delta^{t-1}$$

より

$$w = \frac{1-\delta}{1-\delta^T} \sum_{t=1}^{T} w_t \delta^{t-1}$$

(3)　$0 < r < 1$ より $0 < \delta = \frac{1}{1+r} < 1$.

したがって，次の結論を得る．

$$\lim_{T\to\infty} P = \lim_{T\to\infty} \frac{w(1-\delta^T)}{1-\delta} = \frac{w}{1-\delta}$$

$$\lim_{T\to\infty} w = \lim_{T\to\infty} \frac{1-\delta}{1-\delta^T} \sum_{t=1}^{T} w_t\,\delta^{t-1}$$

$$= (1-\delta) \sum_{t=1}^{\infty} w_t\ \delta^{t-1}$$

この例題 4.7 (3) は数列の極限および無限等比級数の和の公式を用いるので、授業では取り上げなかった。この例のように，最初は「数学 B」の知識で解けるが少し発展させると「数学 III」で学習する事柄をどんどん使っていくので、経済学部の大学受験で「数学」を課せられない場合であっても、経済学部の「経済数学」では高校で学習する数学については、「数学 III」までのすべてを使うといっても過言ではない。

大学の経済学部を卒業した学生で経済数学を深く学び高校教員になるケースは、私の経験から言っても稀であると思う。その結果、高校での進路指導等で経済学部への進学を希望する生徒に「数学をしっかり勉強しておくように」という指導にはほとんどならないのが現状であると思う。しかしながら、上で見たように経済学の問題を定量的に扱おうとすれば、当たり前のことであるが数学は避けて通れない。このギャップを埋めるために、最近では大学の側からの様々な努力が見られるが、高校における教育課程と進路指導の現状をみるとき、それだけではこの問題は解決しないと思われる。大学・高校の双方からの継続的な改善への努力が求められる。

3.3 連続複利とその応用

テキストでは、連続時間における利子率についても次のように扱っている。離散時間で単位期間が 1 年の場合、c 万円を年利率 r で 1 年間預金すると元利合計は c(1+r)万円となる。連続時間は、離散時間において単位期間の長さをどんどん短くしていったときの極限とみなすことができる。

3.3.1 連続時間における複利

単位期間が$\dfrac{1}{k}$年の場合の 1 期間あたりの利子率は $r \cdot \dfrac{1}{k} = \dfrac{r}{k}$ であるとする。いま、$x = \dfrac{k}{r}$ とおく。利息の付く間隔が$\dfrac{1}{k}$年のとき、c 万円を 1 年間預金すると預金残高は

$$c\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xr} = c\ \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{r}$$

となる。t 年後の預金残高は

$$c\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\mathrm{kt}} = c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xrt} = c\ \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{rt}$$

となる。ここで、$\mathrm{e} \coloneqq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ とおくと

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{kt}} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{rt} = e^{rt}$$

となる。すなわち x が十分大きいとき、次の近似式が成り立つ。

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \approx e^{rt}$$

したがって、k が十分大きな数であれば、c 万円の t 年後の預金残高はおおよそ ce^{rt} 万円と表すことができることがわかる。また、逆に t 年後にもらえる a 万円の割引現在価値は、連続時間では

$$\mathrm{a}(e^{-r})^{t} = ae^{-rt}$$

万円と表されることもわかる。

割引現在価値とは少し異なるが、もう少し身近な例として、物価が上昇したときの実質収入がある（小林，1994）。

例 1　100 万円を年利率 5 %の連続的複利で t 期間預金したときの元利合計は $100\cdot e^{0.05t}$ である．もし，連続的複利の計算で物価が上がっていくとすると，時刻 t（t 年後）での収入の実質的な金額は, $100\cdot e^{-0.05t}$ 万円/年となる．例えば、毎年頭に 100 万円の収入があり，その金額の価値が 1 年間変わらない（物価がその年には上昇しない）とすると，5 年間の総実質収入は近似的に次のようになる．

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{5}\frac{100}{e^{0.05\cdot(k-1)}}\cdot 1 = 453.551$$

物価上昇がなければ 500 万円のはずが約 454 万円にしか相当しないことになる．半年ごと 100 万円の価値が変化する（すなわち半年ごとに物価があがる）として，同じように計算すると 5 年間の総実質収入は

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{10}\frac{100}{e^{0.05\cdot(k-1)}}\cdot\frac{1}{2} = 447.951$$

となり、一ヶ月ごとの場合は

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{60}\frac{100}{e^{0.05\cdot(k-1)}}\cdot\frac{1}{12} = 443.32$$

となる。

当然のことながら物価上昇の間隔が短いほど実質総収入は少なくなる．これらの数値計算には、フリーの数式処理ソフト Maxima を用いた。

ここで用いた数学は高校数学の域を出ないが、連続時間の複利法については現行の高校数学教科書や問題集で扱われることはないので、経済学部の数学でこの問題を取り上げるときは、上の例のような丁寧な指導が必要であると思う。

3.3.2 連続時間における割引現在価値

例題 4.7 は、連続時間における割引現在価値の問題に拡張される。

現在(t = 0)から T 時点(t = T)まで単位時間当たり一定の収入[1] $\overline{w}$ 万円をもらい続けることの割引現在価値は、$\sum_{t=1}^{T}\overline{w}\ \delta^{T-1}$ を積分の形に移行して

$$\int_0^T \overline{w}e^{-rt}\ dt = \overline{w}\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^T$$
$$= \frac{\overline{w}}{r}\left(1-e^{-rT}\right)$$

となり、期間が無限の場合は

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \overline{w}e^{-rt}dt = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{\overline{w}}{r}\right)\left(1-e^{-rT}\right) = \frac{\overline{w}}{r}$$

となる。

収入が一定と限らない場合は、t 時点での単位時間あたりの w(t)万円の収入があるとする。このときの割引現在価値は、例題 4.7(1)で計算した

$$P_v = \sum_{t=1}^{T} w_t \delta^{t-1}$$

を連続時間に移行して

$$\int_0^T w(t) e^{-rt} dt$$

を得る。期間が無限の場合は

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T w(t) e^{-rt} dt \ = \ \int_0^\infty w(t) e^{-rt} dt$$

となる。

ここまでくると、通常大学の理工系の１ 年次に学ぶ広義積分の概念が必要となるが、被積分関数にe^{-rt}が含まれている特殊な場合なので、そのあたりは深入りしないことにすればよい。むしろ、ここで問題になるのは離散的な数列の和から連続的な定積分への移行の理解および時々刻々変化する量の総和を定積分で求めることができることの理解とそれらの計算への習熟であると思われる。

3.4 離散から連続へ

離散から連続への移行の問題について、この節で検討することにしよう。

3.4.1　区分求積法と定積分

筆者が高校生のときは、積分を導入する際に区分求積法を学んだ記憶がある。現行の高校教科書では、「数学 II」において、積分の概念は微分の逆演算として導入される。区分求積法の考え方については、例えば A 社の「数学 II」では章末の「COLUMN」の欄で半ページほどで簡単に紹介され、「数学 III」の積分法の最後のほうの、「定積分と和の極限」という節において

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x)dx$$

が取り扱われている。特に、この二番目の等式の応用が受験問題として出題されることもあり、理科系の大学学部へ進学を希望し一般入試を受験する高校生たちは、これらの概念と計算にある程度習熟していると考えられるが、経済学部へ進学希望の高校生で、「数学 III」を履修しているものは稀であるので、ほとんどの経済学部生はこの区分求積法の考え方について高校では学習していないと思われる。大学の講義で丁寧な説明が望まれるところだが、現実には講義時間の制約から、例えば筆者の場合は１回 90 分の講義の中で 30 分程度説明したに過ぎない。高校の「数学 II」の授業（あるいは補習的な授業で）でも、教科書の制約に縛られずぜひ取り上げていただきたいものであるし、また大学の経済学部におけるリメディアル教育の中でも取り扱うべきものである。

3.4.2 量と積分

現行の高校数学では、積分の応用として扱うものは、面積の計算、体積の計算、曲線の長さ、速度と道のりなどである。銀林（銀林, 1957）は、二つの外延量の商としてあらわされる内包量

$$\mathrm{m} = \frac{x}{y}$$

において、基底外延量 x を時間以外の空間的量であるか、時間そのものであるかによって、空間型、時間型に大別し、さらに分子の外延量 y が、物体 A の上に一様に載っている集合関数である場合と、y が点関数の二つの値の差として現れる場合すなわち分布量であるか位差量であるかによって分類し、前者の場合を分布型、後者の場合を位差型と名づけ、次のような表にまとめた。

表 2 内包量の分類

	分布量	位差量
空間型	密度	勾配
時間型	流量	速度

高校においては、「数学 III」で速度と道のりの単元で速度の積分によって道のりが求められることを学習する。しかし、授業等でそれ以外の内包量の積分を取り扱う場合は、非常に稀であると思われる。そこで、ここで筆者が過去に高校の授業で取り上げた例をいくつか紹介する（浜本, 1999）。

例題１　タンクに水を入れている．時刻 t における水の流入速度が(t^2+t) (l / 秒) であるという．t＝0 から t＝6 までの流入量を求めよ．

解　流入速度を表す関数を t＝0 から t＝6 まで積分すればよい．

$$\int_0^6 (t^2+t)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^6 = 72+18=90$$

例題２　900 l の水が入るふろおけに，水を入れ始めてから t 秒後の流入速度が

$$\left(\frac{3}{8}+\frac{t}{1600}\right) l/\text{秒}$$

のとき，ふろおけが満水になるのに何分かかるか．

解　ふろおけが満水になるのに T 分かかるとすると，次の方程式を得る．

$$\int_0^T \left(\frac{3}{8}+\frac{t}{1600}\right)dt = 900$$

$$\left[\frac{3}{8}t+\frac{t^2}{3200}\right]_0^T = 900$$

分母を払うと

$$T^2+1200T-2880000=0$$

$$(T-1200)(T+2400)=0$$

$T>0$ より，$T=1200$ を得る．

これらは、流量が時刻 t とともに刻々と変化する場合に、流量（流入速度）を積分すると総流量（総流入量）が求まる例となっている。

次に密度分布から総量を求める例をあげる。

例題３　半径 10km の円形の都市があり、中心から r km の地点での人口密度は(1000−20r)人/km^2 で表され，円を幅Δr km の薄いドーナツ状の地域に分け，そのドーナツ状の地域の人口ΔP は

$$\Delta P=(1000-20r)\cdot 2\pi r\Delta r$$

で表されるという．このとき，この都市のおよその人口を求めよ．

解　総人口は，次のように求められる．

$$P=\int_0^{10}(1000-20r)\cdot 2\pi r\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{10}(1000r-20r^2)dr$$

$$=2\pi\left[500r^2-\frac{20}{3}r^3\right]_0^{10}$$

$$=2\pi\left(50000-\frac{20000}{3}\right)$$

$$=272133$$

すなわち，総人口は約 272, 000 人である．

先に取り上げた連続複利で物価が上昇していくときの実質収入の例もこの型に分類されるだろう。

例２　利率が年あたり 0.05 の連続複利で物価が上昇し，１ 年あたり 100 万円の収入（収入は連続的にあるものとする）が 5 年間で実質どのくらいの収入になるかは, 次の積分で求められる．

$$\int_0^5 \frac{100}{e^{0.05t}}dt = 100\left[-\frac{1}{0.05}e^{-0.05t}\right]_0^5$$

$$=100\left\{-\frac{20}{e^{0.25}}-(-20)\right\}=2000\left(1-\frac{1}{e^{0.25}}\right)$$

これだけの計算では、5 年間の実質総収入の金額がどのくらいかわからないので、フリーの数式処理ソフト Maxima で数値計算を実行すると、この値は 442.398 万円となる。

勾配から求められる量を扱う問題としては、次の身近な例がある。

例題４　点Ａから水平にｘｍ進んだ点Ｐでの傾きは，$\frac{1}{100}x$ となっている坂があるとする。このとき，点Ａから水平に 100 m 進んだ点Ｃでは，点Ａよりどのくらい高くなっているか.

解　点Ｐからさらに（ほんの少し）Δｘｍ進むと $\frac{1}{100}x \cdot \Delta x$ m だけ高くなる。したがって，求める高度差はこれらの微少な高度差を加え合わせたものとなっていると考えることができる．よって，求める高度差は

$$\int_0^{100} \frac{1}{100}x\,dx = \left[\frac{1}{200}x^2\right]_0^{100} = 50$$

すなわち 50m となる．

このような具体例を扱うことによって、高校生にとっての積分のイメージが「面積・体積の計算」のみでない豊かな広がりを見せることになるだろう。しかし、現実にはこのような例を高校で学習してきた大学生は非常に少数であろうから、大学の理系の初年次教育だけでなく、すべての大学生に「数学の世界の豊かな広がり」を実感できる機会を大学側が提供できるよう入学前教育・初年次教育の改善をのぞみたい。

3.4.3 分布関数と確率密度関数

「経済数学 2」の授業で教科書として指定した「改訂版　経済学で出る数学」では、第 10 章積分とオークション 10.2 分布関数と密度関数の節で以下のように分布関数･密度関数を扱っている。

定義 10.1　確率変数Ｘに対して，関数 F(x) を「『X が x 以下』という事象が起きる確率」，すなわち,

$$F(x) = P(\{X \leq x\}) \qquad (10.1)$$

とするとき，F をＸの分布関数という．また，Ｘを「F に従う確率変数」という．

ここで注意しておきたいのは、この「分布関数」という用語も概念も現行の高校数学では扱われないということである。あえて言えば「数学Ｂ」の教科書にある正規分布表がそれに近いのだが、正規分布表では $p(u) = P(0 \leq Z \leq u)$ で定義された p(u) の値が載っている（ただし、ここで確率変数 Z は標準正規分布に従うものとする）。分布関数と言う用語は使っていないが、その概念を標準正規分布の場合をとおして高校生に伝わるように工夫された教科書が過去には存在した。約 34 年前に高等学校の教科書として使用され、現在はちくま学芸文庫の中の一冊として出版されている「高等学校の確率・統計」（黒田ら，2011）で、確率変数Ｔが標準正規分布に従うとき、$I(a) = P(T \leq a)$ とおいて、この

$$I(c) \qquad (-3 \leq c \leq 3)$$

の表が正規分布表として 2 ページにわたり掲載されている。しかし、大学受験準備の弊害かその時代にあっても「確率・統計」の教科書で二項分布や正規分布、統計的判断の分野を学習した高校生は一部に限られる。まして、現行学習指導要領では「数学Ｂ」の標準単位数は２ 単位であるので、「数学Ｂ」を履修した高校生でも、第４ 章の「確率分布と統計的推測」まで学習した高校生は少ないであろう。私は、多くても高校生の 5〜10 %ぐらいしか学習していないのではないかと推測している。

そのような現状にかんがみて、テキストでは先の分布関数の定義に続いて、確率

$$P(x < X \leq x + \varepsilon) = F(x + \varepsilon) - F(x)$$

の考察に移り､微分の章で議論した「局所正比例」の概念を利用し

$$F(x + \varepsilon) - F(x) \approx f(x) \cdot \varepsilon \quad (f(x) = F'(x))$$

であること、すなわち

$$dF(x) = f(x)\,dx \qquad (10.5)$$

と表されることを説明している。その後で、密度関数（確率密度関数）の定義を与えている。

定義 10.2　区間[a, b] 上に値をとる確率変数の

分布関数 F(x) に対して，f(x) = F′(x) を満たす関数 f(x) を F(x) の密度関数という．

さらにその後で、(10.5) 式が

(確率) = (密度) × (幅)　　(10.6)

という形をしていることに注意を促している。このことは、確率密度関数という概念を理解する上で非常に重要な点であるが、残念ながら現行の高校教科書では紙数の制約からかあまり触れられていない。

3.4.4 連続確率変数の期待値

「数学 B」では、連続確率変数の期待値・分散について、E(X) = m とおくと

$$\mathrm{E(X)} = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx, V(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-m)^2 f(x)dx$$

と定義されることが書かれている。しかし、確率変数 X が離散的な場合の

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k,\ V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2\, p_k$$

との関連については表立っては触れられていない。それは、この「数学 B」が「数学 III」の履修を前提とすることができない（すなわち区分求積法を用いることができない）からである。

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} x_k\, p_k \leftrightarrow E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x\, f(x)dx$$

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} (x_k - m)^2\, p_k$$

$$\leftrightarrow \mathrm{V(X)} = \int_{\alpha}^{\beta} (x-m)^2 f(x)dx$$

と対応させてみれば、例えば E(X) の場合

$$\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta},\ x_k \cdot p_k \leftrightarrow x \cdot f(x)dx$$

なる対応関係がわかる．

特に、ここで $\mathrm{p_k} \longleftrightarrow$ f(x) dx と対応することが、式(10.6) の指摘から重要である。本来なら、このようなことは高校生のときに理解しておいてほしいことであるが、現状ではそれは難しいことなので、特に大学の文系学部で数学を選択する学生にはきちんと伝えたいものである。

3.5 セカンドプライス・オークションの期待収入

分布関数、密度関数、連続型確率変数の期待値は、セカンドプライス・オークションの期待収入を計算するときに必要となる。特に重要なのは次の例題である。

例題 10.2 （抜粋）　$\mathrm{V_1, V_2}$ をそれぞれ区間[0, 1] 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とする．このとき，X = min{$\mathrm{V_1, V_2}$} で定義される区間[0, 1] 上の分布関数 F(x) と密度関数 f(x) を求めよ．

解　分布関数は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \mathrm{F(x)} &= \mathrm{P(X \leqq x)} \\ &= \mathrm{P(\{V_1 \leqq x\}) \cup P(\{V_2 \leqq x\})} \\ &= 1 - \mathrm{P(\{V_1 > x\} \cap \{V_2 > x\})} \\ &= 1 - \mathrm{P(\{V_1 > x\})P(\{V_2 > x\})} \\ &= 1 - (1-\mathrm{x})(1-\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 \end{aligned}$$

また密度関数は,

$$\mathrm{f(x) = F'(x)} = 2 - 2\mathrm{x}$$

となる．

セカンドプライス・オークションについてここで触れるゆとりはないが、この例題の計算の結果から次の問題に答えることができる。

問題　2 名の入札者の評価額を表す確率変数 $\mathrm{V_1}$, $\mathrm{V_2}$ はいずれも区間[0, 1] 上の一様分布に独立に従い，各入札者は最適な入札行動をとるとする．このセカンドプライス・オークションにおける売り手の収入を表す確率変数 X = min{ $\mathrm{V_1, V_2}$} の期待値を求めよ．

解　例題 10.2 の結果より，売り手の収入の期待値は

$$\mathrm{E(X)} = \int_0^1 x(2-2x)dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

となる．

この例題 10.2 および問題の解答で、$X = \min\{V_1, V_2\}$ の意味、余事象の確率、集合についてのド・モルガンの法則、確率変数の独立、連続型確率変数の期待値などの概念に慣れ親しんでいることが求められる。いずれも非常に基本的な事柄であるが、経済学部に進学してくる学生がこれらの概念に十分習熟しているとはいいがたいので、高校・大学双方の側からの問題解決に向けた取り組みが早急に求められる。

４．その他と今後の課題

以上、「経済数学 1」「経済数学 2」の授業の経験から、経済学部における数学教育について、いくつかの問題点を明らかにした。今回のささやかな経験を通しても、ここで取り上げたこと意外にも「微分」を「局所正比例」(この概念を初めて高校の数学教科書に取り上げたのは（黒田ら，2012 である）として捉えることの重要性や「漸化式と経済成長モデル」（尾山ら，2013 の第 11 章）などについて議論したいところであったが、紙数および時間的制約から、これらについてはまたの機会に譲る。

今回議論したことと、(瀧澤，2013）に紹介されている早稲田大学の文系学部での組織的な取り組みは非常に関連が深い。筆者は、早稲田大学のこの取り組みは、リメディアル教育という観点から見ても画期的なものであると考えている。また、経済学部で教えられる「経済数学」の必須内容としての、「多変数関数の極値問題」や「線型代数学の経済学への応用（例えば『線形計画法』)」などについても、早稲田大学での取り組みも含めて、高校数学との接続・発展の観点から数学教育上の問題点について、今後明らかにしていきたいと考えている。

参考文献

銀林浩（1957),「量の世界　構造主義的分析」, むぎ書房

黒田孝郎，小島順，野崎昭弘，森毅（2011）「高等学校の確率・統計」ちくま学芸文庫，筑摩書房

黒田孝郎，小島順，野崎昭弘，森毅（2012）「高等学校の基礎解析」ちくま学芸文庫，筑摩書房

小林道正（1994）「文科系に生かす微積分」講談社 BLUE BACKS1031，講談社

高木一郎（2013）「経済学における数学の応用・効用について」東海大学経営学部紀要　第 1 号, pp.1-24.

瀧澤武信（2013）「早稲田大学（文系学部）における数学教育の新しい取り組み-高等学校数学との連携-」じっきょう数学資料 No.67, pp.1-4. 実教出版

蓮井敏，濱地賢太郎（2004）「経済学部学生の数学の学力について[II] ―新入生の学力回復―」『京都産業大学論集』社会科学系列第 21 号, pp.195-202.

浜本久二雄（1999）「量と積分，数学 II 改訂版指導資料」pp.158-162, 三省堂

岡部恒治・戸瀬信之・西村和雄（1999）「分数の出来ない大学生」東洋経済新報社

尾山大輔　他編著（2013）「［改訂版］経済学で出る数学　高校数学からきちんと攻める」日本評論社

濱本久二雄（関西大学教育開発支援センター研究員）