数学科　学習指導案

授業実施者

指導教員　　　　　　先生

1．実施日時　　2023年6月8日（木）3限

2．学　　年　　2年6組

3．教材名　　教科書：「新編　数学Ⅱ」（数研出版）

ワーク：「3TRIAL　数学Ⅱ」（数研出版）

4．単元名　　第2章　複素数と方程式　第1節　複素数と2次方程式の解

5．単元の目標　　今までの数の領域である実数に加えて虚数(複素数)を知ることで、「-」を含む数の平方根を考えられるようにする。方程式についての理解を深め，数の範囲を複素数まで拡張して2次方程式を解くことができるようにする。

6．教材観　　本教材は要所において分かりやすく色分けされていることで理解を促進するとともに、例題や練習問題が多く、知識・技能を重点的に伸ばすことができる教材である。さらに、ワークとして豊富な問題量を難易度別に分類しており丁寧な解説・例題が記載されている「3TRIAL　数学Ⅱ」を使用し、自主的に問題解決に取り組む主体性の定着を目的とする。

7. 単元の評価基準

知識・技能	思考力・判断力・表現力	主体的に取り組む態度
・2次方程式の解の公式を利用して，2次方程式を複素数の範囲で解くことができる。 ・判別式を利用して，2次方程式の解の種類を複素数の範囲で判別することができる。	・2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ における解の公式$(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})/a$ とともに判別式Dの代わりに $D/4$ を用いても解の種類を判別できることを理解し，積極的に用いようとする。	・2次式を複素数の範囲で因数分解することに興味をもち，問題に取り組もうとする。

8．単元の指導計画

第2章　複素数と方程式

第1節　複素数と2次方程式の解　　8時間

時	学習内容
1	複素数(導入)　実部,虚部の相等
2,3	複素数の四則計算,負の数の平方根
4,5【本時】	2次方程式の解
6,7	解と係数の関係
8	問題演習

9．本時の展開

（1）本時の目標　・変数mをもつ2次方程式において、解の種類に応じて変数mの範囲を求めることができる。

・変数mをもつ2次方程式において、解の種類について場合分けを行い各場合の変数mの範囲を求めることができる。

（2）学習過程

	学習内容・活動	予想される 生徒の反応	留意点	評価方法
復習 10分	・2次方程式を2次関数と置き換えたグラフを表示し、視覚的に解の種類を判別できるようにする	・一年時に習った解の判別を忘れている	・2次関数のグラフにおいて、x軸とグラフの交点の意味や二次方程式の判別式との関係に注意して説明を行う	・定期テスト
展開 40分	・実数範囲における解の判別を復習後、複素数の範囲では判別式D<0のとき解の種類が「解なし」から「異なる2つの虚数解」に変わることを説明 ・例題2 グラフを用いつつ解説 ・練習11 ・練習問題を生徒に答えてもらう ・練習11解説後,各問いのグラフを見せる ・例題3 ・変数mの値をグラフ上で変化させグラフの動き方を見る(例題3) ・練習12 ・練習問題を生徒に答えてもらう(グループの場合代表を各自で決めさせる) ・練習12解説後,各問いのグラフを見せる	・解なしと書いてしまう ・重解と異なる二つの実数解の違いがわからない ・2次方程式と判別式D の関係が分からない ・判別式の値に応じた解の種類の判別を覚えられない ・2次不等式の解き方を忘れている生徒が出てくる ・練習12,13において、難しいと感じる生徒が出てくる	・間違えた場合も解く過程を褒める ・残り時間に応じてグループで考えてもらう(練習12, 13) ・難しい問題であるため机間巡視を入念に行う ・2次不等式の解き方の復習を入れる(例題3) ・判別式Dがどんな値になれば、どのような解をもつかという点に注意して解説を行う(例題3) ・2次不等式の解き方を忘れている場合はグラフなどを用いて考えることを促す(例題3)	・課題 ・定期テスト
これ以降は可能であれば進む	・判別式Dの値に応じて場合分けする必要があることを伝える ・応用例題1 ・練習13	・解の種類の判別でつまずいている生徒がいる(例題2参照) ・どのように場合分けするべきか分からない生徒が出てくる。	・場合分けが「D<0」「D=0」「D>0」の3通りになることに注意させる	

まとめ 5分	1)Dの値に応じた解の種類 2)解の種類に応じて変数mの範囲を求め方 3)解の種類ごとに判別式Dの値ごとに場合分けを行い、各場合の変数mの範囲を求め方 ・以上の3つについて復習する	・理解できなかった部分の復習を促す	・質問がないか確認する	

とくに，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は次の公式で与えられる。

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例 9 2次方程式 $3x^2-7x+5=0$ を解く。

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{11}\,i}{6}$$ 終

練習 10 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2+3x+4=0$　　(2) $x^2-4x+12=0$

(3) $2x^2+5x+5=0$　　(4) $x^2-2\sqrt{3}\,x+4=0$

C 2次方程式の解の種類の判別

方程式の解のうち，実数であるものを **実数解** といい，虚数であるものを **虚数解** という。なお，2次方程式の重解は常に実数解である。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ がどのような種類の解であるかを判別するためには，解における根号の中の b^2-4ac すなわち **判別式** の符号を調べればよい。判別式はふつう D で表す*。

2次方程式	$2x^2+5x+1=0$	$9x^2+12x+4=0$	$3x^2-7x+5=0$
判別式 D	$D=5^2-4\cdot2\cdot1$ $=17>0$	$D=12^2-4\cdot9\cdot4$ $=0$	$D=(-7)^2-4\cdot3\cdot5$ $=-11<0$
解	$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	$x=-\dfrac{2}{3}$	$x=\dfrac{7\pm\sqrt{11}\,i}{6}$
解の種類	異なる2つの実数解	重解(実数解)	異なる2つの虚数解

注意 ▶ 2次方程式の異なる2つの虚数解は，互いに共役な複素数である。

* Dは「判別式」を意味する英語 discriminant の頭文字である。

一般に，次のことがいえる。

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と，その判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ 重解をもつ

$D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

注意 ▶ 重解は実数解であるから，「$D\geqq0 \iff$ 実数解をもつ」が成り立つ。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では，$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$ であるから，Dの代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いても，解の種類を判別できる。

例題 2 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $3x^2+5x+1=0$　　(2) $9x^2+6x+1=0$

(3) $2x^2-x+3=0$

解答 2次方程式の判別式をDとする。

(1) $D=5^2-4\cdot3\cdot1=13>0$

よって，この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。

(2) $\dfrac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$　　$9x^2+2\cdot3x+1=0$

よって，この2次方程式は重解をもつ。

(3) $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot3=-23<0$

よって，この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ。

練習 11 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $x^2+5x+5=0$　　(2) $2x^2+4x+3=0$

(3) $-4x^2+x-1=0$　　(4) $x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0$

例題 3 2次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答 この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+3)=m^2-4m-12$$

2次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときである。

よって　$m^2-4m-12\geqq0$

$(m+2)(m-6)\geqq0$

これを解いて　$m\leqq-2,\ 6\leqq m$

練習 12 2次方程式 $x^2+2mx+m=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) 異なる2つの虚数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

応用例題 1 m は定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2+2x+m=0$$

考え方 m の値によって判別式 D の符号が変わる。D の符号によって場合分けする。

解答 この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot m=1-m$$

よって，2次方程式の解は次のようになる。

$D>0$ すなわち $m<1$ のとき　異なる2つの実数解

$D=0$ すなわち $m=1$ のとき　重解

$D<0$ すなわち $m>1$ のとき　異なる2つの虚数解

練習 13 m は定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $x^2+4x+m=0$　(2) $x^2-mx+4=0$

3 解と係数の関係

2次方程式の解は，解の公式によって求めることができるが，解の和や積は解を求めることなく知ることができる。

ここでは，2次方程式の解と係数の関係について学ぼう。

A 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，これらの和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ を計算してみよう。

$D=b^2-4ac$ とすると

和　$\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

積　$\alpha\beta=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{(-b)^2-D}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$

このように，2次方程式の2つの解の和と積は，方程式の係数を用いて表すことができる。これを，2次方程式の **解と係数の関係** という。

解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

補足 ▶ 上の関係は，$\alpha=\beta$ のとき，すなわち解が重解のときにも成り立つ。

例 10 2次方程式 $2x^2+3x-6=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\qquad \alpha\beta=\frac{-6}{2}=-3$$ 終

練習 14 次の2次方程式について，2つの解の和と積を求めよ。

(1) $3x^2+4x+2=0$　(2) $x^2-6x-4=0$