第１学年 数学科 学習指導案

指導日時：令和３年７月１日（木）第２校時
指導学級 ：第１学年４組

指 導 者

１ 単元名 〔科目名〕２次関数（東京書籍「数学Ⅰ Advanced」）

２ 単元の目標

関数の概念を，互いに関連しながら変化する対応関係として理解する．
中学校で学んだ関数$y = ax^2$の性質をもとにして，一般の２次関数$y = ax^2 + bx + c$のグラフを平行移動を利用してかくことができる．
２次関数の値の変化について，関数の最大値・最小値を調べることができる．
２次関数のグラフを用いて，２次不等式が解ける．

３ 指導に当たって

（１）単元について

中学校では，具体的な事象を関数$y = ax^2$を用いて表現し考察することを学んでいる．本単元では具体的な事象から離れて$y = ax^2$から始め，平行移動の考えを用いて$y = a(x-p)^2 + q$まで対象を拡張する．さらに平方完成を用い，一般形の$y = ax^2 + bx + c$から$y = a(x-p)^2 + q$の形に変形することを学ぶ．また，頂点や定義域に着目し，値の変化を考察して関数の最大値・最小値を求める．２次方程式は中学校で既習だが，本単元ではこれをグラフとx軸との関係として捉え直し，２次不等式へと発展させていく．

（２）生徒の実態

指導学級の生徒は男子１７名，女子２３名で，数学についての学力は様々な段階にいるが全体として真面目に取り組む生徒が多い．ほとんどの生徒が大学進学，特に国公立大学を目指しており，数学の必要性を感じている．周りの人と意見を交換するように促すと，すぐに取り組むことができ，様々な意見が出てくるクラスである．

（３）指導について

２次関数のグラフについては，積極的にグラフをかくことで視覚的に捉えやすくする．$y = a(x-p)^2$の式に関しては，見かけ上のpの符号が逆になるので，奇異に感じる生徒も出てくることが考えられるため，説明をしっかり行う．平方完成は演習の時間をとってしっかり定着させる．グラフの平行移動は，頂点に着目するという視点に生徒が気づけることが望ましい．最大値・最小値は，頂点および端点における関数の値を比較することが必要であることを理解させる．特に，軸の位置と定義域の関係に十分注意させる．２次関数のグラフとx軸との共有点のx座標は，２次方程式の実数解として得られることを理解させる．２次不等式は２次関数のグラフをもとにして個々の問題について３つに大別される解法のどれを用いれば良いか判断できるように，その都度説明する．

４ 単元の評価規準

関心・意欲・態度	思考・判断・表現	技能	知識・理解
２次関数に関心をもつとともに，その有用性を認識し，事象の考察に活用しようとしている．	２次関数を用いて事象を考察し表現したり，その過程を振り返ったりすることで，関数的な見方や考え方を身につけている．	２次関数を用いて事象を表現・処理する技能を身につけている．	２次関数に関する基本的な概念を理解し，基礎的な知識を身につけている．

５ 単元の指導および評価計画（全３時間）

学習項目	時数（本時）	主なねらいに対する主な学習活動	関	思	技	知	学習活動における主な具体の評価規準（評価方法）
２次関数と $y = ax^2$ $y = ax^2 + q$ $y = a(x-p)^2$ のグラフ	１	主なねらい $y = ax^2 + q$のグラフはy軸方向の平行移動を表すことを理解する $y = a(x-p)^2$のグラフはx軸方向の平行移動を表すことを理解する					
		$y = ax^2$ $y = ax^2 + q$ のそれぞれについて，xの値とyの値の対応表を作り座標平			●		$y = ax^2 + q$，$y = a(x-p)^2$のグラフについて，よく整理し，適切に表現している．（ノート，机間巡視）

		面上に点を打っていき,グラフの移動の様子を確認する.					
$y=a(x-p)^2$ $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ	2	主なねらい　$y=a(x-p)^2+q$はy軸方向とx軸方向の平行移動の組み合わせであることを理解する.					
		グラフをかくことによって,元のグラフからどのように移動したグラフを表している式なのか確認する.		●		●	$y=a(x-p)^2+q$のグラフについて,よく整理し,適切に表現している.(ノート,机間巡視)
グラフの平行移動,対称移動	3 (本時)	主なねらい　頂点に着目することで,グラフの平行移動を理解する.					
		周囲と考える時間を設け,何に着目してグラフの平行移動を考えると良いか意見交換させる.	●	●	●		周囲と意見交換しながら,グラフをかき,平行移動の量を求めることができている.

6 本時の指導

(1)題材名「2次関数グラフの平行移動,対称移動」

(2)本時の中心的な活動とねらい

① 2つの2次関数のグラフの平行移動について周囲と考える時間を設け,頂点に着目して平行移動の量を考えることに気づくことができているか.

(3)本時の評価規準

評価の観点	具体の評価規準	Aとする具体的な姿	Cへの具体な手立て
関心・意欲・態度	本時の題材に関心をもち,周囲と協力して理解しようとする.	既習内容と関連づけ,積極的に周囲と協力して理解を深めようとしている.	意見が出やすい問いかけをし,話し合いが活発になるようフォローする.
数学的な技能	頂点に着目して,グラフの平行移動を考えることができている.	正確に座標平面上に頂点をプロットし,更にx切片,y切片など詳細なグラフがかけている.	頂点を正確にとれて図が描かれているか確認する.

(4)学習指導上の工夫(主に本時のねらいに対して)

・グループワークや振り返りの機会を設ける.
・積極的にグラフをかくことで,グラフの平行移動を視覚的に捉えさせる.

(5)準備物

・教科書
・プリント

(6)本時の展開

段階	学習活動と$\boxed{\text{主な発問}}$	形態	指導上の留意点	評価の観点(評価方法)
導入 10分	1 導入(グラフの平行移動の復習) $y=ax^2+q$と$y=a(x-p)^2$の復習 $y=-2x^2-3$ $y=2(x-1)^2$	A	グループワークのための机移動 実際にグラフを描いてどう移動しているか確認する. 軸と頂点をしっかり答えられるか確認	口頭で答えてもらい理解度を確認する.

	$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ (主な発問)それぞれ元のグラフを何軸方向にどれだけ平行移動したものか? (主な発問)軸と頂点は? $y=a(x-p)^2+q$の復習 P79 問 9,問 10 の(1)を板書しながら解説する. 問 9(1)$y=(x-2)^2+1$の軸と頂点. (主な発問)軸と頂点は? 問 10(1)$y=2x^2$のグラフを平行移動して頂点を$(-3,4)$に移動した時の 2 次関数を求める. 2 <u>本時の学習課題を知る</u> 学習課題:2 次関数のグラフの平行移動と対称移動	A	する. x軸方向の移動の時は符号に注意することを伝える. 軸と頂点をしっかり答えられるか確認する. 問 9,10 の残りの問題は次回やることを伝える.	口頭で答えてもらい理解度を確認する.
展開 35 分	3 <u>グラフの平行移動</u> (プリント) $y=(x+1)^2+2$のグラフをどのように平行移動すると$y=(x-3)^2-1$のグラフになるか. (主な発問)この形の 2 次関数からわかる情報は? (主な発問)軸と頂点は? $y=(x+1)^2+2\cdots$① 軸:直線$x=-1$　　頂点:点$(-1,2)$ $y=(x-3)^2-1\cdots$② 軸:直線$x=3$　　頂点:点$(3,-1)$ ①のグラフを x 軸方向に 4,y 軸方向に-3だけ平行移動すれば②のグラフになる.	G	<u>プリント配布</u> $y=a(x-p)^2+q$の形からわかる情報をもとに考えさせる. 頂点に着目するという考えが,生徒から出てくることが望ましい. 頂点に着目して,グラフをどう平行移動すれば目的のグラフに重なるか考えさせる. グラフを描き頂点に着目してグラフの動きを確認する.	(机間巡視) 口頭で答えてもらい理解度を確認する.
	(プリント) $y=-(x-4)^2+3$のグラフをどのように平行移動すると$y=-(x+2)^2+6$のグラフになるか. (主な発問)軸と頂点は? $y=-(x-4)^2+3\cdots$① 軸:直線$x=4$　　頂点:点$(4,3)$ $y=-(x+2)^2+6\cdots$② 軸:直線$x=-2$　　頂点:点$(-2,6)$ ①のグラフをx軸方向に-6,y軸方向に3だけ平行移動すれば②のグラフになる.	G	グラフを描き頂点に着目してグラフの動きを確認する. 移動後の頂点座標から移動前の頂点座標を引くことでどれだけ平行移動すれば良いか形式的に(グラフを書かなくても)わかることを伝える. <u>教科書 p82 の内容をやっていたことを伝える.</u>	(机間巡視)

	4 グラフの対称移動 (プリント) (1) $y=(x-2)^2$と$y=(x+2)^2$ (2) $y=(x-1)^2$と$y=-(x-1)^2$ (3) $y=(x-3)^2+2$と$y=-(x+3)^2-2$ (1) y軸に関して対称移動 (2) x軸に関して対称移動 (3) 原点に関して対称移動 時間に余裕があった場合 p93 $y=-(x+3)^2+7$のグラフを次のように移動させた放物線をグラフとする2次関数を求める. (i) x軸に関して対称移動 (ii) y軸に関して対称移動 (iii) 原点に関して対称移動	G G	グラフを描かせる. 平行移動だという意見が出ると考えられる. 対称移動という言葉を生徒から引き出す. 対称移動の定義を理解させる. 原点に関して対称移動については,図を描いて説明する. 原点に関して対称移動までやったら,教科書 p93 をやっていることを伝える. 頂点がどう移動するか考えさせる.	(机間巡視) (机間巡視)
まとめ 5 分	6 本時の振り返り グラフの平行移動,対称移動は頂点に着目することが大切である.	A		

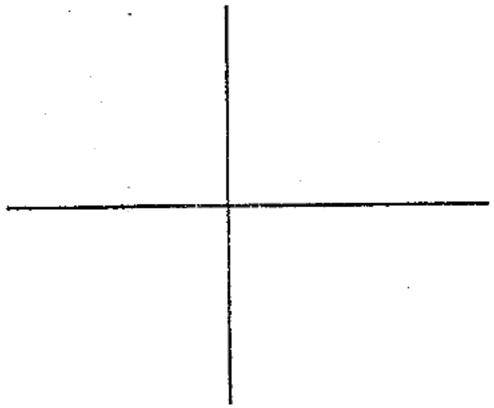
※形態:A(一斉),G(グループ)

(7) 学習プリント・ワークシート(別添)

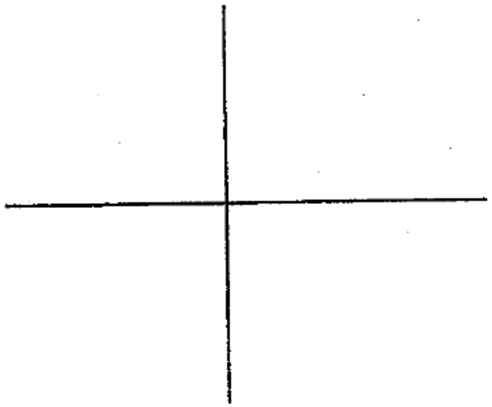
【参考文献】評価規準の作成,評価方法の工夫改善のための参考資料(高等学校)
<平成24年3月> http://www.nier.go.jp/kaihatsu/shidousiryou.html

7月1日（木）授業プリント　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

問１　$y=(x+1)^2+2$…①のグラフをどのように平行移動すると$y=(x-3)^2-1$…②のグラフになるか．



問２　$y=-(x-4)^2+3$…③のグラフをどのように平行移動すると$y=-(x+2)^2+6$…④のグラフになるか．

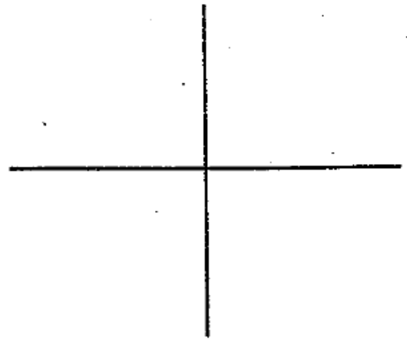


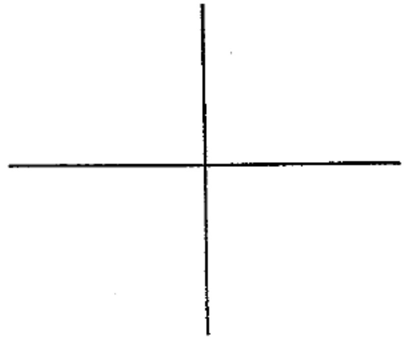
問３　次のグラフを書け．

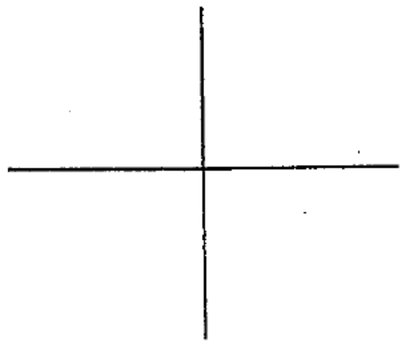
(1)$y=(x-2)^2$ と $y=(x+2)^2$

(2)$y=(x-1)^2$ と $y=-(x-1)^2$

(3)$y=(x-3)^2+2$ と $y=-(x+3)^2-2$







2 2次関数とそのグラフ

関数 $y=2x^2$, $y=x^2+3x$, $y=-2x^2+4x+1$

などのように，y が x の2次式で表されるとき，y は x の **2次関数** という。

一般に，x の2次関数は，a, b, c を定数として

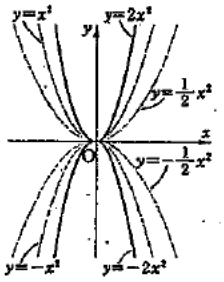
$$y=ax^2+bx+c$$

の形に表すことができる。ただし，$a \neq 0$ とする。

$y=ax^2$ のグラフ

はじめに，基本的な2次関数 $y=ax^2$ について復習しておこう。

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸に関して対称である。このグラフが表す曲線を **放物線** という。



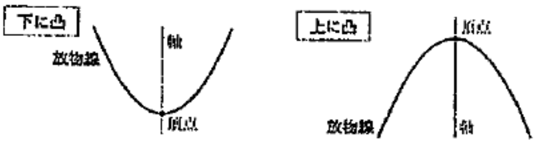
一般に，放物線の対称軸を **軸**，軸と放物線の交点を **頂点** という。

$y=ax^2$ のグラフは，軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

また，この放物線は

$a>0$ のときは **下に凸**，　$a<0$ のときは **上に凸**

であるという。



問6　次の2次関数のグラフをかけ。

(1) $y=3x^2$　　(2) $y=-3x^2$　　(3) $y=-\frac{1}{3}x^2$

$y=ax^2+q$ のグラフ

図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を **平行移動** という。

2次関数の式と，そのグラフの平行移動の関係について調べてみよう。

例8　2つの2次関数

$$y=2x^2 \quad と \quad y=2x^2+4$$

を比べることによって，$y=2x^2+4$ のグラフをかいてみよう。

これらの2つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$2x^2+4$	…	22	12	6	4	6	12	22	…

上の表から，同じ x の値に対応する y の値は，$2x^2+4$ の方が $2x^2$ より4だけ大きいことがわかる。

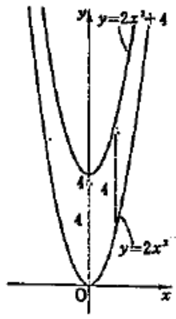
したがって，$y=2x^2+4$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを

　y 軸方向に4

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の軸は y 軸，頂点は点 $(0, 4)$ である。



一般に，$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

y 軸方向に q だけ平行移動

した放物線である。[1] その軸は y 軸，頂点は点 $(0, q)$ である。

問7　次の2次関数のグラフをかけ。

(1) $y=x^2-4$　　(2) $y=-3x^2+3$

(1) たとえば，"y 軸方向に -1 だけ平行移動する" ということは，"y 軸の負の向きに1だけ平行移動する" ということである。

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

例9　2つの2次関数

$$y=2x^2 \quad と \quad y=2(x-3)^2$$

を比べることによって，$y=2(x-3)^2$ のグラフをかいてみよう。

これらの2つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$2x^2$	…	8	2	0	2	8	18	32	50	…
$2(x-3)^2$	…	50	32	18	8	2	0	2	8	…

上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に3だけずれていることがわかる。

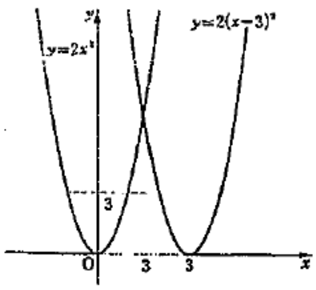
したがって，

$y=2(x-3)^2$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを

　x 軸方向に3

だけ平行移動した放物線である。



この放物線の軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3, 0)$ である。

注意　点 $(p, 0)$ を通り，y 軸に平行な直線を **直線 $x=p$** と表す。

一般に，$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

した放物線である。その軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p, 0)$ である。

問8　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-(x-4)^2$　　(2) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

例10　2次関数

$y=2x^2$

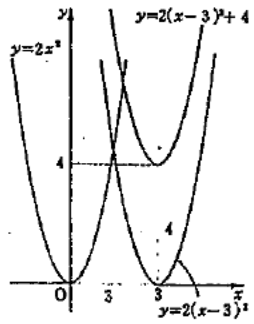
のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動すると

$y=2(x-3)^2$

のグラフになる。さらに，y 軸方向に4だけ平行移動すると

$y=2(x-3)^2+4$

のグラフになる。したがって



$y=2(x-3)^2+4$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に3，y 軸方向に4だけ平行移動

した放物線である。その軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3, 4)$ である。

一般に，次のことが成り立つ。

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

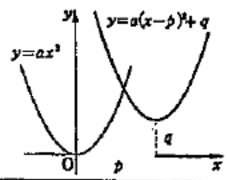
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，

$y=ax^2$ のグラフを

　x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線である。

軸は直線 $x=p$，頂点は点 (p, q)



問9　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=(x-2)^2+1$　　(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

問10　2次関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動して，頂点を次の点に移したとき，それをグラフとする2次関数を求めよ。

(1) $(-3, 4)$　　(2) $(2, -5)$　　(3) $(-1, -6)$

$y=ax^2+bx+c$ の形で表される放物線は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。ここでは，x^2 の係数が等しい2つの放物線の一方を平行移動して他方に重ねることを考えてみよう。

例題 2 グラフの平行移動

2次関数 $y=x^2+2x+3$ のグラフをどのように平行移動すると，2次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフになるか。

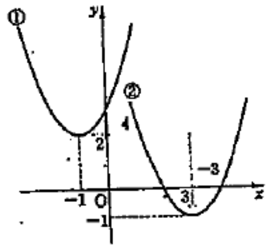
考え方 x^2 の係数が等しい2つの2次関数のグラフは，平行移動して重ねることができるから，放物線の頂点が重なるように，平行移動するとよい。

解答 2つの2次関数を

$y=x^2+2x+3$ ……①

$y=x^2-6x+8$ ……②

とおく。



①の2次関数は

$y=(x+1)^2+2$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(-1,\ 2)$ である。

②の2次関数は

$y=(x-3)^2-1$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(3,\ -1)$ である。

したがって，①のグラフを

x 軸方向に 4，　y 軸方向に -3

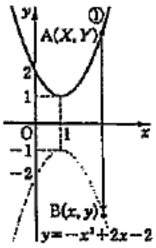
だけ平行移動すれば，②のグラフになる。

問15　2次関数 $y=-x^2+8x-13$ のグラフをどのように平行移動すると，2次関数 $y=-x^2-4x+2$ のグラフになるか。

グラフの対称移動

例1 2次関数 $y=x^2-2x+2$ ……①

のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数を求めてみよう。



①のグラフは，点 $(1,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める2次関数のグラフは，頂点が点 $(1,\ -1)$ で上に凸の放物線である。

ゆえに，求める2次関数は

$y=-(x-1)^2-1$　すなわち　$y=-x^2+2x-2$ ……②

同様に，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数はそれぞれ，$y=x^2+2x+2$，$y=-x^2-2x-2$ となる。

例1は次のように考えることもできる。

①のグラフ上の点 $A(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $B(x,\ y)$ とすると　$x=X,\ y=-Y$ ……③

$A(X,\ Y)$ は①上にあるから　$Y=X^2-2X+2$ ……④

③の X，Y を④に代入すると，$X=x$，$Y=-y$ より

$-y=x^2-2x+2$　すなわち　$y=-x^2+2x-2$

よって，点Bは②の2次関数のグラフ上にある。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動すると $-y=f(x)$ すなわち 関数 $y=-f(x)$

y 軸に関して対称移動すると 関数 $y=f(-x)$

原点に関して対称移動すると $-y=f(-x)$ すなわち 関数 $y=-f(-x)$

のグラフになる。

問1　2次関数 $y=-x^2-6x-2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数をそれぞれ求めよ。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例11 2次関数

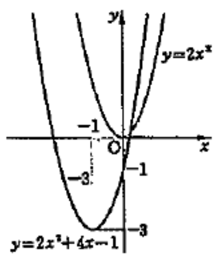
$y=2x^2+4x-1$ ……①

のグラフをかいてみよう。

まず，①を変形して，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y&=2x^2+4x-1\\
&=2(x^2+2x)-1 &&\leftarrow x^2\text{ の係数でくくり出す}\\
&\qquad\quad (2\text{の半分})\\
&=2\{(x+1)^2-1^2\}-1 &&\leftarrow \{(x+(x\text{の係数の半分}))^2-(x\text{の係数の半分})^2\}\\
&=2(x+1)^2-2-1 &&\leftarrow \{\ \}\text{をはずす}\\
&=2(x+1)^2-3 &&\leftarrow \text{定数項を整理する}
\end{aligned}
}
$$

この結果から，①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線であることがわかる。



したがって，①のグラフは軸が直線 $x=-1$，頂点が点 $(-1,\ -3)$ の放物線である。また，$x=0$ のとき $y=-1$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ -1)$ で交わる。

例11のようにして，ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成** という。

問11　次の2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2+4x+5$　　(2) $y=3x^2-6x+4$

(3) $y=-x^2+6x+1$　　(4) $y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$

(5) $y=x^2+3x+4$　　(6) $y=-2x^2+2x+3$

例題 1 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=-x^2-2x+3$ のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

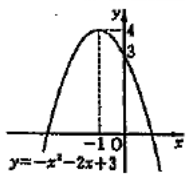
解答 与えられた2次関数は

$y=-(x^2+2x)+3$

$=-\{(x+1)^2-1^2\}+3$

$=-(x+1)^2+4$

と変形できる。



よって，求めるグラフは軸が直線 $x=-1$，頂点が点 $(-1,\ 4)$ の上に凸の放物線である。また，グラフは y 軸と点 $(0,\ 3)$ で交わるから，上の図のようになる。

問12　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=2x^2+12x+8$　　(2) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$

(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$　　(4) $y=-x^2-x+1$ ⇒ p.91 問題2

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の式は，次のように変形できる。

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

したがって，次のことが成り立つ。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

> 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフで
>
> 軸は直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　頂点は点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

注意　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである放物線を，単に，放物線 $y=ax^2+bx+c$ といい，$y=ax^2+bx+c$ をこの放物線の方程式という。